全纯逆紧映射的间隙现象

吴瑞聪

华东师范大学

2022 年全国多复变学术年会

8 月 17 日至 21 日

单位球的全纯逆紧映射问题

单位球的全纯逆紧映射问题

全纯逆紧映射 (Proper holomorphic map)

设 $f\colon X \to Y$ 为全纯映射. 若对所有紧集 $K \subset Y$, $f^{-1}(K)$ 皆为紧, 则称 f 为逆紧.

全纯逆紧映射 (Proper holomorphic map)

设 $f\colon X \to Y$ 为全纯映射. 若对所有紧集 $K \subset Y$, $f^{-1}(K)$ 皆为紧, 则称 f 为逆紧.

若 X, Y 为区域及 f 可延拓到 $\overline{X} = \partial X \cup X$ 的一个邻域, 则 $f(\partial X) \subset \partial Y$.

单位球的全纯逆紧映射问题

全纯逆紧映射 (Proper holomorphic map)

设 $f\colon X \to Y$ 为全纯映射. 若对所有紧集 $K \subset Y$, $f^{-1}(K)$ 皆为紧, 则称 f 为逆紧.

若 X, Y 为区域及 f 可延拓到 $\overline{X} = \partial X \cup X$ 的一个邻域, 则 $f(\partial X) \subset \partial Y$.

Alexander 定理 (1974, Math. Ann.)

设 $n \geq 2$. 所有全纯逆紧映射 $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ 皆为 $\mathbb{B}^n$ 的自同构.

间隙现象 (Gap phenomenon)

间隙现象 (Gap phenomenon)

Faran 定理 (1986, J. Diff. Geom.)

设 $n \geq 3$ 及 $N \leq 2n-2$. 所有有理逆紧映射 $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 等价于一线性嵌入.

间隙现象 (Gap phenomenon)

Faran 定理 (1986, J. Diff. Geom.)

设 $n \geq 3$ 及 $N \leq 2n-2$. 所有有理逆紧映射 $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 等价于一线性嵌入.

Faran 定理的一个等价描述

若 $n+1 \leq N \leq 2n-2$ 及 $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 为有理逆紧映射, 则 f 的像落在 $\mathbb{B}^N$ 的一个超平面截面中.

间隙现象 (Gap phenomenon)

Faran 定理 (1986, J. Diff. Geom.)

设 $n \geq 3$ 及 $N \leq 2n-2$. 所有有理逆紧映射 $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 等价于一线性嵌入.

Faran 定理的一个等价描述

若 $n+1 \leq N \leq 2n-2$ 及 $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 为有理逆紧映射, 则 f 的像落在 $\mathbb{B}^N$ 的一个超平面截面中.

当 $N = 2n-1$, 有 Whitney 映射

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_{n-1}, z_1 z_n, \ldots, z_{n-1} z_n, z_n^2).$$

间隙现象 (Gap phenomenon)

Faran 定理 (1986, J. Diff. Geom.)

设 $n \geq 3$ 及 $N \leq 2n-2$. 所有有理逆紧映射 $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 等价于一线性嵌入.

Faran 定理的一个等价描述

若 $n+1 \leq N \leq 2n-2$ 及 $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 为有理逆紧映射, 则 f 的像落在 $\mathbb{B}^N$ 的一个超平面截面中.

当 $N = 2n-1$, 有 Whitney 映射

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_{n-1}, z_1 z_n, \ldots, z_{n-1} z_n, z_n^2).$$

当 $N = 2n$, 有逆紧映射映射

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n \cos\theta, z_1 z_n \sin\theta, \ldots, z_{n-1} z_n \sin\theta, z_n^2 \sin\theta).$$

Huang-Ji-Xu 定理 (2006, Math. Res. Lett.)

若 $2n+1 \le N \le 3n-4$ 及 $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 为有理逆紧映射, 则 f 的像落在 $\mathbb{B}^N$ 的一个超平面截面中.

Huang-Ji-Xu 定理 (2006, Math. Res. Lett.)

若 $2n+1 \leq N \leq 3n-4$ 及 $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 为有理逆紧映射, 则 f 的像落在 $\mathbb{B}^N$ 的一个超平面截面中.

当 $3n-3 \leq N \leq 3n$, 有类似于 $N = 2n-1$ 或 $2n$ 时的非线性退化有理逆紧映射。

间隙现象

Huang-Ji-Xu 定理 (2006, Math. Res. Lett.)

若 $2n+1 \leq N \leq 3n-4$ 及 $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 为有理逆紧映射, 则 f 的像落在 $\mathbb{B}^N$ 的一个超平面截面中.

当 $3n-3 \leq N \leq 3n$, 有类似于 $N = 2n-1$ 或 $2n$ 时的非线性退化有理逆紧映射。

Huang-Ji-Yin 定理 (2014, Math. Ann.)

若 $3n+1 \leq N \leq 4n-7$ 及 $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 为有理逆紧映射, 则 f 的像落在 $\mathbb{B}^N$ 的一个超平面截面中.

间隙猜想

设 $n \geq 3$. 对每个满足 $\dfrac{k(k+1)}{2} + 2 \leq n$ 的正整数 k, 令

间隙猜想

设 $n \geq 3$. 对每个满足 $\dfrac{k(k+1)}{2} + 2 \leq n$ 的正整数 k, 令

$$\mathcal{I}_k := [kn+1, (k+1)n - \frac{k(k+1)}{2} - 1].$$

间隙猜想

设 $n \geq 3$. 对每个满足 $\dfrac{k(k+1)}{2} + 2 \leq n$ 的正整数 k, 令

$$\mathcal{I}_k := [kn+1, (k+1)n - \frac{k(k+1)}{2} - 1].$$

Huang-Ji-Yin 间隙猜想 (2007)

若 $N \in \mathcal{I}_k$ 及 $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 为有理逆紧映射, 则 f 的像落在 $\mathbb{B}^N$ 的一个超平面截面中.

间隙猜想

设 $n \geq 3$. 对每个满足 $\dfrac{k(k+1)}{2} + 2 \leq n$ 的正整数 k, 令

$$\mathcal{I}_k := \left[kn+1, (k+1)n - \frac{k(k+1)}{2} - 1\right].$$

Huang-Ji-Yin 间隙猜想 (2007)

若 $N \in \mathcal{I}_k$ 及 $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 为有理逆紧映射, 则 f 的像落在 $\mathbb{B}^N$ 的一个超平面截面中.

对 $N \notin [1, n-1] \cup \bigcup_k \mathcal{I}_k$, 已知存在从 $\mathbb{B}^n$ 到 $\mathbb{B}^N$ 的非线性退化的有理逆紧映射.

间隙猜想

设 $n \geq 3$. 对每个满足 $\frac{k(k+1)}{2} + 2 \leq n$ 的正整数 k, 令

$$\mathcal{I}_k := [kn+1, (k+1)n - \frac{k(k+1)}{2} - 1].$$

Huang-Ji-Yin 间隙猜想 (2007)

若 $N \in \mathcal{I}_k$ 及 $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 为有理逆紧映射, 则 f 的像落在 $\mathbb{B}^N$ 的一个超平面截面中.

对 $N \notin [1, n-1] \cup \bigcup_k \mathcal{I}_k$, 已知存在从 $\mathbb{B}^n$ 到 $\mathbb{B}^N$ 的非线性退化的有理逆紧映射.

Faran 定理 $\Leftrightarrow$ 猜想对 $\mathcal{I}_1$ 成立;
Huang-Ji-Xu 定理 $\Leftrightarrow$ 猜想对 $\mathcal{I}_2$ 成立;
Huang-Ji-Yin 定理 $\Leftrightarrow$ 猜想对 $\mathcal{I}_3$ 成立.

间隙猜想

令 $\mathcal{I}_k := [kn+1, (k+1)n - \frac{k(k+1)}{2} - 1]$.

Huang-Ji-Yin 间隙猜想 (2007)

若 $N \in \mathcal{I}_k$ 及 $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 为有理逆紧映射, 则 f 的像落在 $\mathbb{B}^N$ 的一个超平面截面中.

间隙猜想

令 $\mathcal{I}_k := [kn+1, (k+1)n - \frac{k(k+1)}{2} - 1]$.

Huang-Ji-Yin 间隙猜想 (2007)

若 $N \in \mathcal{I}_k$ 及 $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 为有理逆紧映射, 则 f 的像落在 $\mathbb{B}^N$ 的一个超平面截面中.

令 $\mathcal{J}_k := [kn+k, (k+1)n - k^2 - 1]$.

间隙猜想

令 $\mathcal{I}_k := [kn+1, (k+1)n - \frac{k(k+1)}{2} - 1]$.

Huang-Ji-Yin 间隙猜想 (2007)

若 $N \in \mathcal{I}_k$ 及 $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 为有理逆紧映射, 则 f 的像落在 $\mathbb{B}^N$ 的一个超平面截面中.

令 $\mathcal{J}_k := [kn+k, (k+1)n - k^2 - 1]$.

定理 [Gao-N., 2021]

若 $N \in \mathcal{J}_k$ 及 $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 为有理逆紧映射, 则 f 的像落在 $\mathbb{B}^N$ 的一个超平面截面中.

间隙猜想

令 $\mathcal{I}_k := [kn+1, (k+1)n - \frac{k(k+1)}{2} - 1]$.

Huang-Ji-Yin 间隙猜想 (2007)

若 $N \in \mathcal{I}_k$ 及 $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 为有理逆紧映射, 则 f 的像落在 $\mathbb{B}^N$ 的一个超平面截面中.

令 $\mathcal{J}_k := [kn+k, (k+1)n - k^2 - 1]$.

定理 [Gao-N., 2021]

若 $N \in \mathcal{J}_k$ 及 $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 为有理逆紧映射, 则 f 的像落在 $\mathbb{B}^N$ 的一个超平面截面中.

另外, 该间隙现象对广义球同样成立.

间隙猜想

令 $\mathcal{I}_k := [kn+1, (k+1)n - \frac{k(k+1)}{2} - 1]$.

Huang-Ji-Yin 间隙猜想 (2007)

若 $N \in \mathcal{I}_k$ 及 $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 为有理逆紧映射, 则 f 的像落在 $\mathbb{B}^N$ 的一个超平面截面中.

令 $\mathcal{J}_k := [kn+k, (k+1)n - k^2 - 1]$.

定理 [Gao-N., 2021]

若 $N \in \mathcal{J}_k$ 及 $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^N$ 为有理逆紧映射, 则 f 的像落在 $\mathbb{B}^N$ 的一个超平面截面中.

另外, 该间隙现象对广义球同样成立.

$\mathcal{I}_1 = [n+1, 2n-2]$; $\mathcal{I}_2 = [2n+1, 3n-4]$; $\mathcal{I}_3 = [3n+1, 4n-7]$; ...
$\mathcal{J}_1 = [n+1, 2n-2]$; $\mathcal{J}_2 = [2n+2, 3n-5]$; $\mathcal{J}_3 = [3n+3, 4n-10]$; ...

间隙猜想

证明元素：

间隙猜想

证明元素：

1. 射影空间上全纯映射的超平面限制定理

间隙猜想

证明元素：

1. 射影空间上全纯映射的超平面限制定理

   用以估计线性子空间的像的线性包维数下界

间隙猜想

证明元素：

1. 射影空间上全纯映射的超平面限制定理

   用以估计线性子空间的像的线性包维数下界

2. 射影空间的正交映射

间隙猜想

证明元素：

1. 射影空间上全纯映射的超平面限制定理

   用以估计线性子空间的像的线性包维数下界

2. 射影空间的正交映射

   单位球（或广义球）的有理逆紧映射皆为射影空间上的正交映射

整数的 Macaulay 表示

第 n 个 Macaulay 表示

设 $A, n \in \mathbb{N}$，

第 n 个 Macaulay 表示

设 $A, n \in \mathbb{N}$，存在被完全确定的整数 $a_n > a_{n-1} > \cdots > a_\delta$ 使得

$$A = \binom{a_n}{n} + \binom{a_{n-1}}{n-1} + \cdots + \binom{a_\delta}{\delta},$$

其中 $\delta \geq 1$ 及 $a_j \geq j$.

整数的 Macaulay 表示

第 n 个 Macaulay 表示

设 $A, n \in \mathbb{N}$，存在被完全确定的整数 $a_n > a_{n-1} > \cdots > a_\delta$ 使得

$$A = \binom{a_n}{n} + \binom{a_{n-1}}{n-1} + \cdots + \binom{a_\delta}{\delta},$$

其中 $\delta \geq 1$ 及 $a_j \geq j$.

称为 A 的第 n 个 Macaulay 表示.

整数的 Macaulay 表示

第 n 个 Macaulay 表示

设 $A, n \in \mathbb{N}$，存在被完全确定的整数 $a_n > a_{n-1} > \cdots > a_\delta$ 使得

$$A = \binom{a_n}{n} + \binom{a_{n-1}}{n-1} + \cdots + \binom{a_\delta}{\delta},$$

其中 $\delta \geq 1$ 及 $a_j \geq j$.

称为 A 的第 n 个 Macaulay 表示.

例.

$6 = \binom{4}{3} + \binom{2}{2} + \binom{1}{1}$ 为 6 的第 3 个 Macaulay 表示.

$12 = \binom{5}{4} + \binom{4}{3} + \binom{3}{2}$ 为 12 的第 4 个 Macaulay 表示.

全纯映射超平面限制定理

全纯映射超平面限制定理

定理 [Gao-N., 2021]

设 $f\colon U \subset \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ 为全纯映射. 若对 $A \in \mathbb{N}^+$ 有 $\dim(\mathrm{span}(f(U))) \geq A$,

全纯映射超平面限制定理

定理 [Gao-N., 2021]

设 $f\colon U\subset\mathbb{P}^n\to\mathbb{P}^m$ 为全纯映射. 若对 $A\in\mathbb{N}^+$ 有 $\dim(\mathrm{span}(f(U)))\geq A$, 则对一般超平面 $H\subset\mathbb{P}^n$ 满足 $H\cap U\neq\emptyset$，有

$$\dim(\mathrm{span}(f(H\cap U)))\geq A^{-<n>}.$$

全纯映射超平面限制定理

定理 [Gao-N., 2021]

设 $f\colon U \subset \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ 为全纯映射. 若对 $A \in \mathbb{N}^+$ 有 $\dim(\mathrm{span}(f(U))) \geq A$，则对一般超平面 $H \subset \mathbb{P}^n$ 满足 $H \cap U \neq \emptyset$，有

$$\dim(\mathrm{span}(f(H \cap U))) \geq A^{-<n>}.$$

若 $A = \binom{a_n}{n} + \cdots + \binom{a_\delta}{\delta}$ 为 A 的第 n 个 Macaulay 表示，则

$$A^{-<n>} := \binom{a_n - 1}{n-1} + \cdots + \binom{a_\delta - 1}{\delta - 1}.$$

Green 超平面限制定理

Green 超平面限制定理

定理 [Green, 1988]

设 $\mathcal{W} \subset H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ 为线性系且 $\operatorname{codim}(\mathcal{W}, H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))) = c$.

Green 超平面限制定理

定理 [Green, 1988]

设 $\mathcal{W} \subset H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ 为线性系且 $\mathrm{codim}(\mathcal{W}, H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))) = c$.

若 $\mathcal{W}_H \subset H^0(\mathcal{O}_H(d))$ 为 $\mathcal{W}$ 限制在一超平面 $H \subset \mathbb{P}^n$ 所得的线性系，

Green 超平面限制定理

定理 [Green, 1988]

设 $\mathcal{W} \subset H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ 为线性系且 $\mathrm{codim}(\mathcal{W}, H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))) = c$.

若 $\mathcal{W}_H \subset H^0(\mathcal{O}_H(d))$ 为 $\mathcal{W}$ 限制在一超平面 $H \subset \mathbb{P}^n$ 所得的线性系，则对一般超平面，有

$$c_H \leq c_{<d>},$$

其中 $c_H = \mathrm{codim}(\mathcal{W}_H, H^0(\mathcal{O}_H(d)))$.

Green 超平面限制定理

定理 [Green, 1988]

设 $\mathcal{W} \subset H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ 为线性系且 $\operatorname{codim}(\mathcal{W}, H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))) = c$.

若 $\mathcal{W}_H \subset H^0(\mathcal{O}_H(d))$ 为 $\mathcal{W}$ 限制在一超平面 $H \subset \mathbb{P}^n$ 所得的线性系，则对一般超平面，有

$$c_H \leq c_{<d>},$$

其中 $c_H = \operatorname{codim}(\mathcal{W}_H, H^0(\mathcal{O}_H(d)))$.

若 $c = \binom{\gamma_d}{d} + \cdots + \binom{\gamma_\delta}{\delta}$ 为 c 的第 d 个 Macaulay 表示，则

$$c_{<d>} := \binom{\gamma_d - 1}{d} + \cdots + \binom{\gamma_\delta - 1}{\delta}.$$

全纯映射超平面限制定理

定理 [Gao-N., 2021]

设 $f\colon U\subset\mathbb{P}^n\to\mathbb{P}^m$ 为全纯映射. 若对 $A\in\mathbb{N}^+$ 有 $\dim(\operatorname{span}(f(U)))\geq A$ 则对一般超平面 $H\subset\mathbb{P}^n$ 满足 $H\cap U\neq\emptyset$，有

$$\dim(\operatorname{span}(f(H\cap U)))\geq A^{-<n>}.$$

例： 6 的第 3 个 Macaulay 表示为 $6=\binom{4}{3}+\binom{2}{2}+\binom{1}{1}$.

设 $f\colon\mathbb{P}^3\to\mathbb{P}^6$ 为有理映射, 非线性退化.

全纯映射超平面限制定理

定理 [Gao-N., 2021]

设 $f\colon U\subset \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ 为全纯映射. 若对 $A\in\mathbb{N}^+$ 有 $\dim(\mathrm{span}(f(U)))\geq A$ 则对一般超平面 $H\subset\mathbb{P}^n$ 满足 $H\cap U\neq\emptyset$，有

$$\dim(\mathrm{span}(f(H\cap U)))\geq A^{-<n>}.$$

例： 6 的第 3 个 Macaulay 表示为 $6=\binom{4}{3}+\binom{2}{2}+\binom{1}{1}$.

设 $f\colon\mathbb{P}^3\to\mathbb{P}^6$ 为有理映射, 非线性退化.则对一般的 2-维线性子空间 E_2, 有

$$\dim(\mathrm{span}(f(E_2)))\geq\binom{3}{2}+\binom{1}{1}+\binom{0}{0}=4;$$

全纯映射超平面限制定理

定理 [Gao-N., 2021]

设 $f\colon U \subset \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ 为全纯映射. 若对 $A \in \mathbb{N}^+$ 有 $\dim(\mathrm{span}(f(U))) \geq A$ 则对一般超平面 $H \subset \mathbb{P}^n$ 满足 $H \cap U \neq \emptyset$，有

$$\dim(\mathrm{span}(f(H \cap U))) \geq A^{-<n>}.$$

例： 6 的第 3 个 Macaulay 表示为 $6 = \binom{4}{3} + \binom{2}{2} + \binom{1}{1}$.

设 $f\colon \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^6$ 为有理映射, 非线性退化.则对一般的 2-维线性子空间 E_2, 有

$$\dim(\mathrm{span}(f(E_2))) \geq \binom{3}{2} + \binom{1}{1} + \binom{0}{0} = 4;$$

及对一般 1-维线性子空间 E_1

$$\dim(\mathrm{span}(f(E_1))) \geq \binom{2}{1} + \binom{0}{0} = 2.$$

设 $r, s \in \mathbb{N}^+$. 赋予 $\mathbb{C}^{r+s}$ 不定 Hermite 内积：

$$\langle z, w \rangle_{r,s} = z_1\overline{w}_1 + \cdots + z_r\overline{w}_r - z_{r+1}\overline{w}_{r+1} - \cdots - z_{r+s}\overline{w}_{r+s},$$

记 $(\mathbb{C}^{r+s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{r,s})$ 为 $\mathbb{C}^{r,s}$.

Hermite 欧氏空间及射影空间

设 $r, s \in \mathbb{N}^+$. 赋予 $\mathbb{C}^{r+s}$ 不定 Hermite 内积：

$$\langle z, w\rangle_{r,s} = z_1\overline{w}_1 + \cdots + z_r\overline{w}_r - z_{r+1}\overline{w}_{r+1} - \cdots - z_{r+s}\overline{w}_{r+s},$$

记 $(\mathbb{C}^{r+s}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{r,s})$ 为 $\mathbb{C}^{r,s}$.

称 $z \in \mathbb{C}^{r,s}$ 为

正，若 $\langle z, z\rangle_{r,s} > 0$;
负，若 $\langle z, z\rangle_{r,s} < 0$;
零模，若 $\langle z, z\rangle_{r,s} = 0$.

Hermite 欧氏空间及射影空间

设 $r, s \in \mathbb{N}^+$. 赋予 $\mathbb{C}^{r+s}$ 不定 Hermite 内积：

$$\langle z, w\rangle_{r,s} = z_1\overline{w}_1 + \cdots + z_r\overline{w}_r - z_{r+1}\overline{w}_{r+1} - \cdots - z_{r+s}\overline{w}_{r+s},$$

记 $(\mathbb{C}^{r+s}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{r,s})$ 为 $\mathbb{C}^{r,s}$.

称 $z \in \mathbb{C}^{r,s}$ 为

- 正，若 $\langle z, z\rangle_{r,s} > 0$;
- 负，若 $\langle z, z\rangle_{r,s} < 0$;
- 零模，若 $\langle z, z\rangle_{r,s} = 0$.

射影化： $\mathbb{P}^{r,s} := \mathbb{P}\mathbb{C}^{r,s}$.

在 $\mathbb{P}^{r,s}$ 上，正点、负点、零模点依然有意义.

广义球

考虑 $\mathbb{P}^{r,s}$ 上正点的集合：

$$\mathbb{B}^{r,s} := \left\{ [z_1, \ldots, z_{r+s}] \in \mathbb{P}^{r,s} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{r} |z_k|^2 - \sum_{k=r+1}^{r+s} |z_k|^2 > 0 \right\};$$

广义球

考虑 $\mathbb{P}^{r,s}$ 上正点的集合：

$$\mathbb{B}^{r,s} := \left\{ [z_1, \ldots, z_{r+s}] \in \mathbb{P}^{r,s} \,\middle|\, \sum_{k=1}^{r} |z_k|^2 - \sum_{k=r+1}^{r+s} |z_k|^2 > 0 \right\};$$

及零模点的集合：

$$\partial\mathbb{B}^{r,s} := \left\{ [z_1, \ldots, z_{r+s}] \in \mathbb{P}^{r,s} \,\middle|\, \sum_{k=1}^{r} |z_k|^2 - \sum_{k=r+1}^{r+s} |z_k|^2 = 0 \right\}.$$

广义球

考虑 $\mathbb{P}^{r,s}$ 上正点的集合：

$$\mathbb{B}^{r,s} := \left\{ [z_1, \ldots, z_{r+s}] \in \mathbb{P}^{r,s} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{r} |z_k|^2 - \sum_{k=r+1}^{r+s} |z_k|^2 > 0 \right\};$$

及零模点的集合：

$$\partial\mathbb{B}^{r,s} := \left\{ [z_1, \ldots, z_{r+s}] \in \mathbb{P}^{r,s} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{r} |z_k|^2 - \sum_{k=r+1}^{r+s} |z_k|^2 = 0 \right\}.$$

当 $r = 1$, 有

$$\mathbb{B}^{1,s} \subset \mathbb{P}^{1,s} \cong \mathbb{P}^s \quad \text{及} \quad \partial\mathbb{B}^{1,s} \subset \mathbb{P}^{1,s} \cong \mathbb{P}^s$$

为我们熟知的单位球及其边界（被标准嵌入于 $\mathbb{P}^s$).

正交映射

若 $f\colon \mathbb{P}^{r,s} \to \mathbb{P}^{r',s'}$ 为有理映射及 $f(\partial\mathbb{B}^{r,s}) \subset \partial\mathbb{B}^{r',s'}$,

正交映射

若 $f\colon \mathbb{P}^{r,s} \to \mathbb{P}^{r',s'}$ 为有理映射及 $f(\partial\mathbb{B}^{r,s}) \subset \partial\mathbb{B}^{r',s'}$，则有

$$\langle f(z), f(z)\rangle_{r',s'} = \phi(z,\bar{z})\langle z, z\rangle_{r,s}$$

正交映射

若 $f\colon \mathbb{P}^{r,s} \to \mathbb{P}^{r',s'}$ 为有理映射及 $f(\partial\mathbb{B}^{r,s}) \subset \partial\mathbb{B}^{r',s'}$，则有

$$\langle f(z), f(z)\rangle_{r',s'} = \phi(z,\bar{z})\langle z, z\rangle_{r,s} \quad \xRightarrow{\text{极化}} \quad \langle f(z), f(w)\rangle_{r',s'} = \phi(z,\overline{w})\langle z, w\rangle_{r,s}$$

正交映射

若 $f\colon \mathbb{P}^{r,s} \to \mathbb{P}^{r',s'}$ 为有理映射及 $f(\partial\mathbb{B}^{r,s}) \subset \partial\mathbb{B}^{r',s'}$，则有

$$\langle f(z), f(z)\rangle_{r',s'} = \phi(z,\bar{z})\langle z, z\rangle_{r,s} \quad \overset{\text{极化}}{\Longrightarrow} \quad \langle f(z), f(w)\rangle_{r',s'} = \phi(z,\overline{w})\langle z, w\rangle_{r,s}$$

$\Longrightarrow$ 若 $\langle z, w\rangle_{r,s} = 0$, 则 $\langle f(z), f(w)\rangle_{r',s'} = 0$.

正交映射

若 $f\colon \mathbb{P}^{r,s} \to \mathbb{P}^{r',s'}$ 为有理映射及 $f(\partial\mathbb{B}^{r,s}) \subset \partial\mathbb{B}^{r',s'}$，则有

$$\langle f(z), f(z)\rangle_{r',s'} = \phi(z,\bar{z})\langle z, z\rangle_{r,s} \quad \xrightarrow{\text{极化}} \quad \langle f(z), f(w)\rangle_{r',s'} = \phi(z,\overline{w})\langle z, w\rangle_{r,s}$$

$\Longrightarrow$ 若 $\langle z, w\rangle_{r,s} = 0$, 则 $\langle f(z), f(w)\rangle_{r',s'} = 0$.

对 $[z], [w] \in \mathbb{P}^{r,s}$, 若 $\langle z, w\rangle_{r,s} = 0$ （在 $\mathbb{P}^{r,s}$ 上有意义），则称 z, w 正交，记为$z \perp w$.

正交映射

若 $f\colon \mathbb{P}^{r,s} \to \mathbb{P}^{r',s'}$ 为有理映射及 $f(\partial\mathbb{B}^{r,s}) \subset \partial\mathbb{B}^{r',s'}$，则有

$$\langle f(z), f(z)\rangle_{r',s'} = \phi(z,\bar{z})\langle z, z\rangle_{r,s} \quad \xRightarrow{\text{极化}} \quad \langle f(z), f(w)\rangle_{r',s'} = \phi(z,\overline{w})\langle z, w\rangle_{r,s}$$

$$\Longrightarrow \quad 若\ \langle z, w\rangle_{r,s} = 0,\ 则\ \langle f(z), f(w)\rangle_{r',s'} = 0.$$

对 $[z], [w] \in \mathbb{P}^{r,s}$, 若 $\langle z, w\rangle_{r,s} = 0$（在 $\mathbb{P}^{r,s}$ 上有意义），则称 z, w 正交，记为 $z \perp w$.

定义

设 $f\colon U \subset \mathbb{P}^{r,s} \to \mathbb{P}^{r',s'}$ 为全纯. 若每当 $p, q \in U$ 且 $p \perp q$, 都有 $f(p) \perp f(q)$, 则称 f 为正交映射 (orthogonal map).

正交映射

若 $f\colon \mathbb{P}^{r,s} \to \mathbb{P}^{r',s'}$ 为有理映射及 $f(\partial\mathbb{B}^{r,s}) \subset \partial\mathbb{B}^{r',s'}$，则有

$$\langle f(z), f(z)\rangle_{r',s'} = \phi(z,\bar{z})\langle z,z\rangle_{r,s} \quad \xRightarrow{\text{极化}} \quad \langle f(z), f(w)\rangle_{r',s'} = \phi(z,\overline{w})\langle z,w\rangle_{r,s}$$

$\Longrightarrow$ 若 $\langle z,w\rangle_{r,s} = 0$, 则 $\langle f(z), f(w)\rangle_{r',s'} = 0$.

对 $[z],[w] \in \mathbb{P}^{r,s}$, 若 $\langle z,w\rangle_{r,s} = 0$（在 $\mathbb{P}^{r,s}$ 上有意义），则称 z,w 正交，记为$z \perp w$.

定义

设 $f\colon U \subset \mathbb{P}^{r,s} \to \mathbb{P}^{r',s'}$ 为全纯. 若每当 $p,q \in U$ 且 $p \perp q$, 都有 $f(p) \perp f(q)$, 则称 f 为正交映射 (orthogonal map).

由上述得知, 若 $f\colon \mathbb{B}^{r,s} \to \mathbb{B}^{r',s'}$ 为有理逆紧映射, 则 f 为从 $\mathbb{P}^{r,s}$ 到 $\mathbb{P}^{r',s'}$ 的正交映射.

例子（间隙现象）

假设 $f\colon \mathbb{B}^7 \to \mathbb{B}^{16}$ 为非线性退化有理逆紧映射.

例子（间隙现象）

假设 $f\colon \mathbb{B}^7 \to \mathbb{B}^{16}$ 为非线性退化有理逆紧映射.

$\Rightarrow$ f 为从 $\mathbb{P}^{1,7}$ 到 $\mathbb{P}^{1,16}$ 的正交映射.

例子（间隙现象）

假设 $f\colon \mathbb{B}^7 \to \mathbb{B}^{16}$ 为非线性退化有理逆紧映射.

$\Rightarrow$ f 为从 $\mathbb{P}^{1,7}$ 到 $\mathbb{P}^{1,16}$ 的正交映射.

$16 = \binom{8}{7} + \binom{7}{6} + \binom{5}{5}$ 为 16 的第 7 个 Macaulay 表示.

例子（间隙现象）

假设 $f\colon \mathbb{B}^7 \to \mathbb{B}^{16}$ 为非线性退化有理逆紧映射.

$\Rightarrow$ f 为从 $\mathbb{P}^{1,7}$ 到 $\mathbb{P}^{1,16}$ 的正交映射.

$16 = \binom{8}{7} + \binom{7}{6} + \binom{5}{5}$ 为 16 的第 7 个 Macaulay 表示.

设 $D_k := \dim(\mathrm{span}(f(L_k)))$, 其中 $L_k \subset \mathbb{P}^{1,7}$ 为一般的 k-维线性子空间.

例子（间隙现象）

假设 $f\colon \mathbb{B}^7 \to \mathbb{B}^{16}$ 为非线性退化有理逆紧映射.

$\Rightarrow$ f 为从 $\mathbb{P}^{1,7}$ 到 $\mathbb{P}^{1,16}$ 的正交映射.

$16 = \binom{8}{7} + \binom{7}{6} + \binom{5}{5}$ 为 16 的第 7 个 Macaulay 表示.

设 $D_k := \dim(\mathrm{span}(f(L_k)))$, 其中 $L_k \subset \mathbb{P}^{1,7}$ 为一般的 k-维线性子空间.
由超平面限制定理得

例子（间隙现象）

假设 $f\colon \mathbb{B}^7 \to \mathbb{B}^{16}$ 为非线性退化有理逆紧映射.

$\Rightarrow f$ 为从 $\mathbb{P}^{1,7}$ 到 $\mathbb{P}^{1,16}$ 的正交映射.

$16 = \binom{8}{7} + \binom{7}{6} + \binom{5}{5}$ 为 16 的第 7 个 Macaulay 表示.

设 $D_k := \dim(\mathrm{span}(f(L_k)))$, 其中 $L_k \subset \mathbb{P}^{1,7}$ 为一般的 k-维线性子空间.
由超平面限制定理得

$D_6 \geq \binom{7}{6} + \binom{6}{5} + \binom{4}{4} = 14;$ $\quad D_5 \geq \binom{6}{5} + \binom{5}{4} + \binom{3}{3} = 12;$

$D_4 \geq \binom{5}{4} + \binom{4}{3} + \binom{2}{2} = 10;$ $\quad D_3 \geq \binom{4}{3} + \binom{3}{2} + \binom{1}{1} = 8;$

$D_2 \geq \binom{3}{2} + \binom{2}{1} + \binom{0}{0} = 5;$ $\quad D_1 \geq \binom{2}{1} + \binom{1}{0} = 2;$

例子（间隙现象）

假设 $f\colon \mathbb{B}^7 \to \mathbb{B}^{16}$ 为非线性退化有理逆紧映射.

$\Rightarrow$ f 为从 $\mathbb{P}^{1,7}$ 到 $\mathbb{P}^{1,16}$ 的正交映射.

$16 = \binom{8}{7} + \binom{7}{6} + \binom{5}{5}$ 为 16 的第 7 个 Macaulay 表示.

设 $D_k := \dim(\mathrm{span}(f(L_k)))$, 其中 $L_k \subset \mathbb{P}^{1,7}$ 为一般的 k-维线性子空间.
由超平面限制定理得

$D_6 \geq \binom{7}{6} + \binom{6}{5} + \binom{4}{4} = 14;\qquad D_5 \geq \binom{6}{5} + \binom{5}{4} + \binom{3}{3} = 12;$

$D_4 \geq \binom{5}{4} + \binom{4}{3} + \binom{2}{2} = 10;\qquad D_3 \geq \binom{4}{3} + \binom{3}{2} + \binom{1}{1} = 8;$

$D_2 \geq \binom{3}{2} + \binom{2}{1} + \binom{0}{0} = 5;\qquad D_1 \geq \binom{2}{1} + \binom{1}{0} = 2;$

$\Rightarrow$ $D_3 + D_3 \geq 16$, 矛盾！

谢谢！