上海大学 2011 ～ 2012 年度 冬季学期试卷（B）答案

成绩	

课程名: 运筹与优化(1) **课程号:** 01025052 **学分:** 4

应试人声明:

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分.

应试人__________ 应试人学号__________ 应试人所在院系__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、(10分) 填空题(每小题2分)

1. 线性规划问题$\min\{c^Tx \,|Ax=b, x\geq 0\}$对应的对偶线性规划问题是

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z=b^Ty \\ \text{s.t.} \quad & A^Ty+s=c \\ & s\geq 0 \end{aligned}$$

2. 一个线性规划问题有几种解？

   四种：可行解、基解、基可行解、最优解.

3. 线性规划问题的最优解的代数表达式？

   设矩阵B^*是线性规划问题的最优基，则线性规划的最优解的表达式为

$$x=\begin{pmatrix} {B^*}^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. 多阶段决策最优化原理是作为一个全过程的最优策略具有这样的性质:
   对于最优策略过程中的任意状态而言，
   无论其过去的状态和决策如何，余下的诸决策必构成一个最优子策略.

5. 最短路问题可以描述为

   最短路问题是给定的网络图中找出一点到各点或任意两点之间距离最短的一条路.

二、(10分) 判别题(每小题2分. 请在每个问题后的括号中填入✓或✗.)

1. 线性规划问题的一定存在解. (✗)
2. 线性规划问题的弱对偶定理一定成立，则$c^Tx\geq b^Ty$. (✓)
3. 整数规划问题的可行解一定是0和1. (✗)
4. 影子价格是指单位资源数量的变化所引起的目标函数最优值的变化. (✓)
5. 动态规划的的数学模型由阶段、状态、决策、状态转移方程及指标函数5个主要要素组成.(✓)

三、(40分) 建模与求解题(每小题10分)

1. 某部门现有资金200万元，今后五年内考虑给以下的项目投资。已知：

- 项目A：从第一年到第五年每年年初都可投资，当年末能收回本利110；
- 项目B：从第一年到第四年每年年初都可投资，次年末能收回本利125, 但规定每年最大投资额不能超过30万元;
- 项目C：需在第三年年初投资，第五年末能收回本利140，但规定最大投资额不能超过80万元;
- 项目D：需在第二年年初投资，第五年末能收回本利155，但规定最大投资额不能超过100万元。

据测定每万元每次投资的风险指数如下表

项目	风险指数(次/万元)
A	1
B	3
C	4
D	5.5

问：

- (10) 如何确定这些项目的每年投资额，使得第五年年末拥有资金的本利金额为最大？
- (10)应如何确定这些项目的每年投资额，使得第五年年末拥有资金的本利在330万元的基础上使得其投资总的风险系数为最小？

解：第1步：确定决策变量：连续投资问题设$x_{ij}, i=1,...,5, j=1,2,3,4$表示第$i$年初投资于第$j$个项目的金额。这样我们建立如下决策变量：

项目	1年投资量	2年投资量	3年投资量	4年投资量	5年投资量
A	x11	x21	x31	x41	x51
B	x12	x22	x32	x42	
C			x33		
D				x24	

第2步：确定约束条件：

- 第1年：A当年末可收回投资，故第一年年初应把全部资金投出去，于是：$x_{11}+x_{12}=200$.
- 第2年：B次年末才可收回投资,故第二年年初的资金为$1.1x_{11}$，于是：$x_{21}+x_{22}+x_{24}=1.1x_{11}$. 第3年：年初的资金为$1.1x_{21}+1.25x_{12}$，于是：$x_{31}+x_{32}+x_{33}=1.1x_{21}+1.25x_{12}$ 第4年：年初的资金为$1.1x_{31}+1.25x_{22}$，于是：$x_{41}+x_{42}=1.1x_{31}+1.25x_{22}$ 第5年：年初的资金为$1.1x_{41}+1.25x_{32}$，于是：$x_{51}=1.1x_{41}+1.25x_{32}$ B、C、D的投资限制：$x_{i2}\geq 30,(i=1,2,3,4), x_{33}\leq 80, x_{24}\leq 100$. 第3步：确定目标函数及模型

$$
\begin{aligned}
\max\quad & 1.1x_{51}+1.25x_{42}+1.4x_{33}+1.55x_{24}\\
s.t.\quad & x_{11}+x_{12}=200\\
& x_{21}+x_{22}+x_{24}=1.1x_{11}\\
& x_{31}+x_{32}+x_{33}=1.1x_{21}+1.25x_{12}\\
& x_{41}+x_{42}=1.1x_{31}+1.25x_{22}\\
& x_{51}=1.1x_{41}+1.25x_{32}\\
& x_{i2}\geq 30,(i=1,2,3,4), x_{33}\leq 80, x_{24}\leq 100\\
& x_{ji}\geq 0, i=1,...,5, j=1,2,3,4.
\end{aligned}
$$

利用上述的假设，第二问的数学模型为：

$$\begin{aligned}
\min \quad & (x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51})+3(x_{12}+x22+x_{32}+x_{42})+4x_{33}+5.5x_{24} \\
s.t. \quad & x_{11}+x_{12}=200 \\
& x_{21}+x_{22}+x_{24}=1.1x_{11} \\
& x_{31}+x_{32}+x_{33}=1.1x_{21}+1.25x_{12} \\
& x_{41}+x_{42}=1.1x_{31}+1.25x_{22} \\
& x_{51}=1.1x_{41}+1.25x_{32} \\
& x_{i2}\geq 30,(i=1,2,3,4),x_{33}\leq 80,x_{24}\leq 100 \\
& x_{ji}\geq 0,i=1,...,5,j=1,2,3,4.
\end{aligned}$$

2. 背包问题: 某人背包可以装10公斤重，$0.025m^3$的物品。他准备用来装甲、乙两种物品。每件物品的重量、体积和价值为表所示, 问两种物品各装多少件，所装物品的总价值最大？

物品	重量(kg(件)	Vol(件)	价值(件)
甲	1.2	0.002	4
乙	0.8	0.0025	3

- (10)建立背包问题的整数规划模型。
- (10)用图解法或分支定界法求出背包问题的最优解和最大价值。

解:

(a) 设甲、乙各装x_1,x_2件，则数学模型为：

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & Z=4x_1+3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 1.2x_1+0.8x_2\leq 10 \\
& 2x_1+2.5x_2\leq 25 \\
& x_1,x_2\geq 0,\text{integer}.
\end{aligned}$$

(b) 首先，松弛问题成一般非线性规划问题，用图解法得到最优解为$(3.57,7.14)$, $z_0 =$ 35.7. 其次，用分支定界法，或者枚举法得到整数最优解为(5.5)

四 、(20分) 算法题(每小题10分)

(a) 对线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

这里A是秩为m的$m \times n$矩阵, b是m维的向量,c是n维的向量. 描述求解线性规划问题单纯形方法的主要步骤（包括初始步，主步，包括无解的判断、变量的出基和进基的公式）和终止标准）.

(b) 对整数线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & \textstyle\sum_{j=1}^n c_j x_j \\ s.t. \quad & \textstyle\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_j, i = 1, ..., m \\ & x_j \geq 0, \text{且部分或全部为整数}, j = 1, ...n, \end{aligned}$$

描述求解整数线性规划问题的分支定界法步骤.

解：

- 初始步（Initialization Step）从矩阵A找一个矩阵B(基矩阵), 构造一个开始点（顶点）.如果找不到，就用人工变量.
- 主步
  (a) 设x 是一个具有基为B的极点. 计算$c_N^T - c_B^T B^{-1} N$. 如果这个向量是所有分量是正的，则终止.结论：x 是一个最优解.
  (b) 否则. 选取$c_B^T B^{-1} a_j - c_j$中分量中最负的, 如果$y_j = B^{-1} a_j \leq 0$, 则终止; 结论：目标函数沿着射线$\{x + \lambda \begin{pmatrix} -y_j \\ e_j \end{pmatrix}\}$ 无界. 另一方面,如果, y_j 的分量不都小于0, 则转下一步.

  (c) 从$\lambda = \min_{1 \leq i \leq m} \{\frac{\bar{b}_i}{y_{ij}} : \ y_{ij} > 0\}$ 计算下标r，形成新的顶点x 使得x_{Bi}和x_j. 在B删除列a_B，添加列a_j，形成新的基.转到主步的第一步.

评分标准：

- 写出初始步-2分；
- 写出检验数判断公式-2分;
- 写出无解的判断-2分;
- 写出变量进基公式-2分
- 写出终止标准-2分.

3. 对整数线性规划问题

$\max\{\sum_{j=1}^n c_j x_j | \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_j, i = 1, ..., m, x_j \geq 0,$ 且部分或全部为整数$, j = 1, ...n\}$, 描述求解整数线性规划问题的分支定界法步骤.

- 求整数规划的松弛问题最优解；若松弛问题的最优解满足整数要求，得到整数规划的最优解,否则转下一步；
- 分支与定界: 任意选一个非整数解的变量x_i，在松弛问题中加上约束: $x_i \leq [x_i]$和$x_i \geq [x_i] + 1$. 组成两个新的松弛问题，称为分枝. 检查所有分枝的解及目标函数值，若某分枝的解是整数并且目标函数值大于（max）等于其它分枝的目标值，则将其它分枝剪去不再计算，若还存在非整数解并且目标值大于(max)整数解的目标值，需要继续分枝，再检查，直到得到最优解.

五 、(20分) 计算题(可用计算器计算)

利用单纯形方法求下列线性规划的问题最优解

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 300x_1 + 400x_2 \\ s.\ t \quad & 2x_1 + x_2 \le 40 \\ & x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 \le 30 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

解：化为标准型，加入松弛变量x_3, x_4,则标准型为：

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 300x_1 + 400x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ s.\ t \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \quad = 40 \\ & x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 \quad + x_4 = 30 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{aligned} \tag{1}$$

系数矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初始基为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

x_3, x_4 为基变量，x_1, x_2 为非基变量. 基本可行解为$x^1 = (0, 0, 40, 30)^T$. 检验数$c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (300, 400) > 0$. 则$x^1 = (0, 0, 40, 30)^T$不是最优解.

取x_2进基.由于$\frac{30}{3/2} = \min\{\frac{40}{1}, \frac{30}{3/2}\}$.

所以，x_4出基. 解方程

$$\begin{aligned} \tfrac{4}{3}x_1 \quad + x_3 \quad - \tfrac{2}{3}x_4 \quad &= 20 \\ \tfrac{2}{3}x_1 \quad + x_2 \quad + \tfrac{2}{3}x_4 \quad &= 20 \end{aligned}$$

令$x_1 = 0, x_4 = 0$,基本可行解为$x^2 = (0, 20, 20, 0)^T$. x^2是不是最优解，检验数$c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (300 - \frac{800}{3}, -\frac{800}{3})^T$. 不都是小于0，因此$x^2$不是最优解. 继续迭代. 得到最优解$x^3 = (15, 10, 0, 0)^T$. 检验数是全负的，因此是最优解.最优值$Z = 8500$.