上海大学 2009 ～ 2010 年度 春 季学期试卷答案

成绩	

课程名: 运筹与优化（2）　**课程号**: 01025053　**学分**: 4

应试人声明:

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人________ 应试人学号________ 应试人所在院系________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一 、(10分) 填空题(每小题1分)

1. 线性规划问题的基可行解对应于可行域的

   顶点.

2. 设x^*和s^*是线性规划问题的原始与对偶问题的解，则它们满足

   $(x^*)^T s^* = 0$.

3. 设x_k是改进搜索的当前点，得到新点的迭代公式是$x_{k+1} = x_k + \lambda\Delta x$, 这里$\Delta x$和$\lambda$分别是

   搜索方向和搜索步长.

4. 设$f(x) : R^n \to R^1$连续可微的函数。若d是f在x处的下降方向，则有

   $d^T\nabla f(x) < 0$.

5. 设$f : R^n \to R^1$ 在点$x^* \in R^n$处二阶连续可微，无约束优化问题：$\min\limits_{x\in R^n} f(x)$的局部最优解$x^*$的必要和充分条件分别为

   $x^* \in R^n$ 是问题的最优解的必要条件是$\nabla f(x^*) = 0$.

   $\nabla f(x^*) = 0$ 和$H(x^*)$是正定矩阵。

6. 设$f(x)$, $g_i(x), i = 1, ..., m$和$h_j(x), j = 1, ..., l$是$R^n \to R^1$的连续可微的函数。非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & g_i(x) \le 0, i = 1, ..., m \\ & h_j(x) = 0, j = 1, ..., l \end{aligned}$$

   $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^l v_j \nabla h_j(x^*) = 0$

   $\lambda_i g_i(x^*) = 0, i = 1, ..., m$

   $\lambda_i \ge 0, i = 1, ..., m$

二、(10分) 判别题(每小题2分。请在每个问题后的括号中填入✓或✗.)

1. 线性规划问题的可行域都是有界的。(✗)

2. 对于一般非线性规划问题，设x^*是问题的局部最优解，则x^*是全局最优解. (✗)

3. 对于一般有约束非线性规划问题，采用外罚函数方法求解问题时，序列无约束优化问题的解都在原问题的可行域内部. (✗)

4. 对于一般有约束非线性规划问题，在最优点处，可行方向锥与下降方向锥的交集是空集. (✓)

5. 线性规划问题的内点算法中心路径的极限是问题的最优解.(✓)

三、(30分) 建模题(每小题15分)

1. 某人有一背包可以装10公斤重、$0.025m^3$的物品。他准备用来装甲、乙两种物品，每件物品的重量、体积和价值如下表所示。问两种物品各装多少件，所装物品的总价值最大.

物品	重量（公斤/件）	体积(m^3/件)	价值（元/件）
甲	1.2	0.002	4
乙	0.8	0.0025	3

解：设甲、乙两种物品各装x_1和x_2斤，则数学模型为

$$
\begin{aligned}
\min\quad & 4x_1 + 3x_2 \\
s.\ t\quad & 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\
& 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \text{且都取整数}.
\end{aligned}
$$

2. 某投资者考虑在一段时间内投资n种股票，他的投资总预算为B. 设随机变量r_i是第$i(i=1,...,n)$种股票的收益率。请给出期望在最小风险的条件下达到预期最小收益r_{min}的优化模型. (注：风险是用$x^T\sum x$表示的, 这里$\sum$是随机变量$r_i, i=1,...,n$的方差。)

解：设投资第i种股票的资金为$x_i, i=1,...,n$. 那么第i种股票的收益率为r_i，则总收益为：$\sum_{i=1}^n x_i r_i = \bar{p}^T x$.

$$
\begin{aligned}
\min\quad & x^T \sum x \\
s.\ t\quad & \bar{p}^T x \ge r_{min} \\
& 1^T x = B, x \ge 0
\end{aligned}
$$

四 、(30分) 算法题(每小题10分)

1. 对线性规划问题

$$\min \quad c^T x$$
$$s.\ t \quad Ax = b$$
$$x \geq 0.$$

这里A是秩为m的$m \times n$矩阵, b是m维的向量,c是n维的向量. 描述单纯形方法的主要思想和主要步骤。

解：主要思想：根据线性规划问题的基本定理，线性规划问题的最优解是在可行域，即多面体的顶点上取得。而且每一个顶点对于一个基可行解。因此，单纯形方法的主要思想的主要思想是：根据A的一个基矩阵B，从可行域的一个顶点开始$x = (B^{-1}b, 0)^T$，通过转轴的方法到另一个顶点，如此迭代，直到取得问题的最优解。

主要步骤：

- step 1 找一个初始可行解
- step 2 计算检验数$c^T B^{-1} N - c^T \leq 0$,则该基可行解是最优解，则停止，否则转step 3
- step 3 如果$B^{-1} A_k \leq 0$ 则问题无最优解，停止；否则转step 4.
- step 4 求$\theta = \min\{\frac{\bar{b}_i}{\hat{a}_{ik}} \quad | a_{ik} > 0, i = 1, ..., m\} = \frac{\bar{b}_r}{\hat{a}_{rk}}$.
- 以A_k 代替A_r得到一个新的基，转step 2。

2. 对无约束优化问题

$$\min \quad f(x)$$
$$s.\ t \quad x \in R^n$$

这里$f(x)$是一阶连续可微函数。描述最速下降算法的思想，算法主要步骤，收敛性结果，描述最速下降算法的优缺点，并针对缺点给出改进的思想和技术。

解：

- 算法的思想：根据在一个点的领域内，负梯度方向是一个最速下降方向。以当前点的负梯度方向为搜索方向，施行一个线搜索，产生新的迭代点。
- 算法主要步骤：

  给定一个初始点x_k, 最速下降算法沿着方向$-\nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$ 施行一个线搜索，或者沿着方向$-\nabla f(x)$施行一个线搜索;

  初始步 设$\epsilon > 0$ 是计算精度. 选取一个初始点x_1, 令$k = 1$, go to 主步.

  主步 如果$\|\nabla f(x)\| < \epsilon$, 停止; 否则, 令$d_k = -\nabla f(x)$, 令$\lambda_k$ 是一维优化问题最优的线搜索解。一维优化问题是

  $$\min \quad f(x_k + \lambda d_k)$$
  $$s.\ t. \lambda \geq 0$$

  令$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$, 用$k$ 代替$k+1$, 重复主步。
- 收敛性结果：如果$f(x)$是一阶连续可微函数，
- 优缺点：优点是方法简单，直观，充分利用了当前点的一阶信息。缺点是收敛速度慢，有锯齿形现象。
- 改进的思想和技术: 对当前点的梯度方向进行摄动，使得当前点的搜索方向不和下一个点的搜索方向正交。两种技术：一是用当前点的二级hessian阵的逆左乘前点的梯度方向。另一种技术利用前面点的搜索方向，对前点的梯度方向加前面点的搜索方向，合成新的方向。

3. 考虑非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.\ t \quad & g_i(x) \le 0, i = 1, .., m \\ & h_j(x) = 0, j = 1, ...l \end{aligned}$$

这里$f(x)$, $g_i(x)$和$h_j(x)$ 是一阶连续可微的函数，描述外罚函数方法，内罚函数方法（障碍方法）的思想，算法的迭代步骤，算法的优缺点。举例说明线性规划内点算法就是应用了内罚函数方法的思想。

解：

- 外罚函数方法思想：通过罚函数和罚参数，把有约束问题化成一系列的无约束优化问题；
- 障碍方法思想：通过障碍函数和障碍参数，把有约束问题化成在可行域内点上的一系列的无约束优化问题；
- 算法的迭代步骤：
  - step 1 取罚参数$\mu > 0$, 精度$\epsilon > 0$, $k := 1$;
  - step 2 求解无约束优化问题
  $$\min_{x \in R^n} f(x) + \mu[\sum_{i=1}^{m} (\max\{0, g_i(x)\})^2 + \sum_{i=1}^{p} (h_j(x))^2]$$
  得到最优解$x^*(\mu)$.
  - step 3 $g(x^*(\mu)) \ge -\epsilon$ 和$|h_j(x^*(\mu))| \le \epsilon$; 则停止；否则转step 4.
  - step 4 令$\mu_{k+1} := 10\mu_k$, $k = k + 1$，转step 2
- 算法的优缺点: 把有约束问题化成一系列的无约束优化问题，其方法简单和自然；缺点是罚参数趋于无穷大，导致了数值计算的困难。
- 内点算法: 令障碍函数为：$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i, \quad x > 0$

五、(20分) 计算题(每小题10分，可用计算器计算)

1. 计算无约束优化问题在当前点$x_0 = (0, 1)^T$的牛顿步

$$\min_{x \in R^2} (x_1 + 1)^4 + x_1 x_2 + (x_2 + 1)^4.$$

近似精度为$\varepsilon = 0.0001$.

解：

$$\nabla f(x_0) = (4(x_1 + 1)^3 + x_2, x_1 + 4(x_2 + 1)^3)^T = (5, 32)^T,$$

$$H(x_0) = \begin{pmatrix} 12(x_1 + 1^2) & 1 \\ 1 & 12(x_2 + 1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 48 \end{pmatrix}$$

$$\triangle x = -\begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 48 \end{pmatrix}^{-1} (5, 32)^T = (-0.3617, -0.6591).$$

2. 利用罚函数方法求下列非线性规划问题的最优解

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ s.\ t \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{aligned}$$

近似精度为$\varepsilon = 0.001$.

解：无约束问题为：

$$\min x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \mu(x_1 + x_2 + x_3 - 1)^2$$

它的最优解为应该是平稳点：

$$\frac{\partial F}{x_i} = 2x_i + 2\mu(x_1 + x_2 + x_3 - 1) = 0, i = 1, 2, 3.$$

$$x_1 = x_2 = x_3$$

$$2x_1 + 2\mu(3x_1 - 1) = 0, x_1(1 + 3\mu) - \mu = 0,$$

我们得到：

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{\mu}{1+3\mu}$$

$$x_i = \lim_{\mu\to\infty} = \lim_{\mu\to\infty} \frac{\mu}{1+3\mu} = 1/3,$$

我们得到最优解：$x^* = (1/3, 1/3, 1/3)^T$.